الأولى سلك باكالوريا

مسالك العلوم التجريبية وعلوم التكنولوجيات الميكانيكية والكهربائية

BR@M@THs

الحساب المثلثي calculs trigonométriques

القدرات المنتظرة

التمكن من مختلف صيغ التحويل . التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثيه تؤول في حلها إلى معادلات أساسية . التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة او متراجحة مثلثيه على الدائرة المثلثية

ا - صـــــيـــغ الجـــمع

ا – المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ولتكن $\zeta(O,r=1)$ الدائرة المثلثية

ولتكن $M(x)$ و $M'(y)$ نقطتين من ζ فان $\overrightarrow{OM'}=\cos(y)\vec{i}+\sin(y)\vec{j}$ و $\overrightarrow{OM}=\cos(x)\vec{i}+\sin(x)\vec{j}$

ادن $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y) \quad (1)$ و $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=\|\overrightarrow{OM}\|.\|\overrightarrow{OM'}\|\cos(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})$
$=1\times1.\cos(y-x) \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $\cos(y-x)=\cos(y)\cos(x)+\sin(y)\sin(x)$

ب- لدينا $\cos(y+x)=\cos(y-(-x))$
$=\cos(y)\cos(-x)+\sin(y)\sin(-x)$

ونعلم أن $\cos$ دالة زوجية و $\sin$ دالة فردية ادن:

$\cos(y+x)=\cos(y)\cos(x)-\sin(y)\sin(x)$

Brahim Ajghaider

ج -

$$\sin(x+y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)$$
$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right]$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(y)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(y)$$

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$
$$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$$

د - لدينا

$$tg(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

باستعمال الصيغ السابقة نجد

$$tg(a+b)=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

ومنه

$$tg(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\sin b}{\cos\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

ادن

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga.tgb}$$

$$tg(a-b)=tg\left[a+(-b)\right]$$
$$=\frac{tga-tgb}{1+tga.tgb}$$

تمرين1

1. احسب النسب المثلثية $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$

2. احسب $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ و $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

استنتاجات

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$$
$$=2\cos^2(a)-1$$
$$=1-2\sin^2(a)$$

و $\sin(2a)=2\sin a.\cos a$ و $tg(2a)=\dfrac{2tg(a)}{1-tg^2(a)}$

Brahim Ajghaider

تمرين2 : علما أن $tg(a)=\frac{-1}{2}$ فاحسب $tg(2a)$ و $\cos(2a)$ ثم $\sin(2a)$

تمرين3 : احسب $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

تمرين4 : بين انه لكل a من $\mathbb{R}$ فان $\sin(2a)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2a\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2a\right)$ و

$$\cos(2a)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2a\right)$$

II – تحـــــــــــويل الجـــــــداء إلى جمـــــع

لدينا $\cos(y+x)=\cos(y)\cos(x)-\sin(y)\sin(x)$

و $\cos(x-y)=\cos(y)\cos(x)+\sin(y)\sin(x)$

بجمع طرف بطرف نجد

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$

بطرح طرف بطرف نجد

$$\sin(x)\sin(y)=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$

$$\sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

$$\cos(x)\sin(y)=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

تحويل الجـــــــــــمع إلى جـــــــــداء

في العلاقات السابقة نضع

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Brahim Ajghaider

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a-\cos b=-2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a-\sin b=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

III- تحويل $tg(a+b)$ و $tg(a-b)$

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ لكل k من $\mathbb{Z}$

- إذا كان $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ فان $tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga.tgb}$

إذا كان $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ فان $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga.tgb}$

IV- تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$

ليكن a و b عددين حقيقين غير منعدمين

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

ولدينا $a^2\leq a^2+b^2$ وكذلك $b^2\leq b^2+a^2$ إذن $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ و $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$

وبما ان $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)=1$

ونعلم ان $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ أي $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

و $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Brahim Ajghaider

وبالتالي $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\alpha\right)$

و $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\sin\beta+\sin x\cos\beta\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\beta\right)$

تمرين5 عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ عما يلي **.1** $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ **.2** $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

تمرين6 حول إلى جداء كل من التعابير التالية

$$A=\cos(2x)+\cos(6x)$$
$$B=\cos(7x)-\cos(3x)$$
$$C=\sin(3x)+\sin(5x)$$
$$D=\sin(8x)-\sin(6x)$$

تمرين 7 ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$
$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

تمرين8 **.1** تحقق من أن $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

.2 أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})/\cos(3x)=\cos x\left(1-4\sin^2 x\right)$

ب- استنتج قيمة كل من $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

.3 بين أن $\sin\left(\frac{7\pi}{30}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$ (لاحظ أن $\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$)

تمرين 9 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **.1** $\sin 7x=0$ **.2** $\cos 3x=0$ **.3** $\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=0$

.3 $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.4** $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.5** $\sin(2x+\frac{\pi}{7})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين10 **.1** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$$
$$\cos^2 x-3\cos x+2=0$$
$$\sqrt{3}tg^2x+\left(\sqrt{3}-1\right)tgx-1=0$$

.2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

Brahim Ajghaider